



# Cinematica degli scheletri



**Corso di Realtà Virtuale**  
**Laurea Magistrale in Informatica**  
**Università degli Studi di Milano**  
Prof. Alberto Borghese  
Laboratorio di Applied Intelligent Systems (Ais-Lab)  
Dipartimento di Informatica  
[alberto.borghese@unimi.it](mailto:alberto.borghese@unimi.it)



A.A. 2024-2025

<http://borghese.di.unimi.it>



## Sommario



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- La cinematica diretta

A.A. 2024-2025

2/42

<http://borghese.di.unimi.it>



# Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{KMA} \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Parametri esterni (4x4)

Parametri interni (3x3)

### 3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D:  $\{\mathbf{P}(X,Y,Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine  $\{\mathbf{p}(x,y,f)\}$
- C) I parametri  $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

### 3 problemi:

- A) + B)  $\rightarrow$  C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C)  $\rightarrow$  A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C)  $\rightarrow$  B) Proiezione (augmented reality).



## Dal 2D al 3D

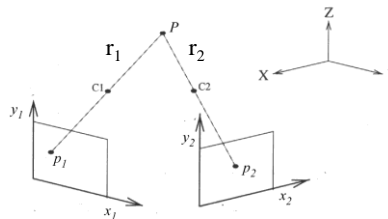
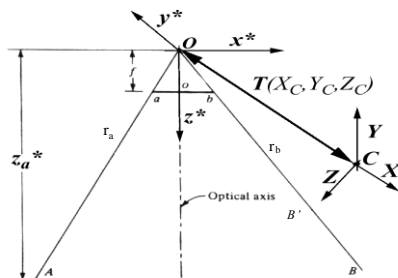


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Nello spazio 3D esistono  $\infty^1$  punti compatibili con b

Sono tutti i punti nello spazio 3D,  $\{X,Y,Z\}$  sulla retta per b e O

Ob identifica una retta

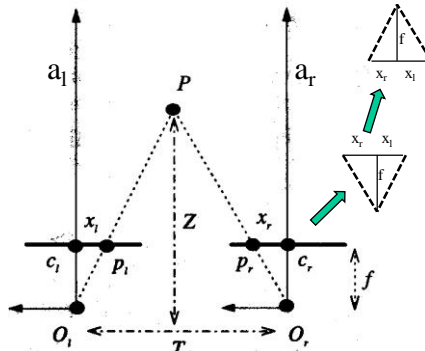
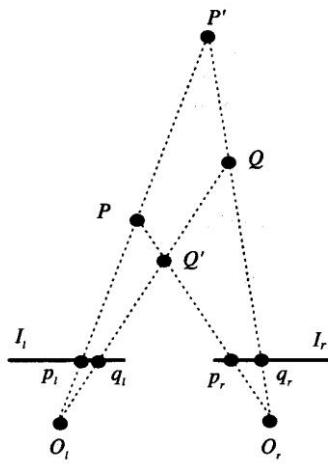
Soluzione: Stereoscopia  
Visione attraverso una coppia di sensori  $r_1$  e  $r_2$  si intersecano



### 3D basato su stereo-disparità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $\{a_l, a_r\}$  coppia di assi ottici
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



$$(a) \quad Z / T = f / d = f / (x_l + x_r) \quad (b)$$

$$Z = T * [f / (x_l + x_r)]$$

Nel sistema visivo umano, T rappresenta (approssimativamente) la distanza inter-pupillare, che viene regolata nei visori di VR sull'Utente.

A

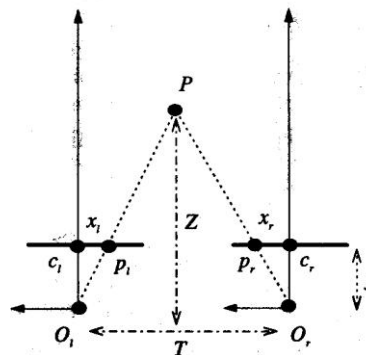
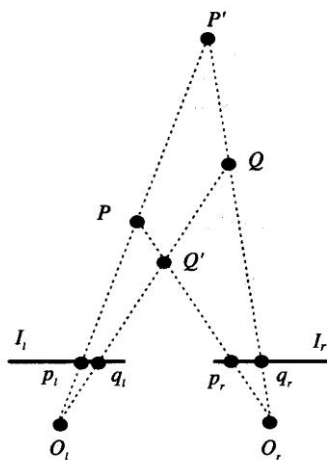
ni.it\



### Risoluzione nella profondità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $\{a_l, a_r\}$  coppia di assi ottici
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



$$(a) \quad Z / T = f / d \quad d = f T / Z$$

$$\Delta d / \Delta Z = -f T / Z^2$$

A.A. 2024-2025

Data  $\Delta d_{\min} \rightarrow \Delta d_{\min} = -f T / Z^2 \times \Delta Z$

<http://borghese.di.unimi.it/>





## Dal 2D al 3D

$$[m_{31}(\mathbf{X}-X_C)+m_{32}(\mathbf{Y}-Y_C) +m_{33}(\mathbf{Z}-Z_C)]*(x-x_0)=f[m_{11}(\mathbf{X}-X_C)+m_{12}(\mathbf{Y}-Y_C) +m_{13}(\mathbf{Z}-Z_C)]$$

$$[m_{31}(\mathbf{X}-X_C)+m_{32}(\mathbf{Y}-Y_C) +m_{33}(\mathbf{Z}-Z_C)]*(y-y_0)=f[m_{21}(\mathbf{X}-X_C)+m_{22}(\mathbf{Y}-Y_C) +m_{23}(\mathbf{Z}-Z_C)]$$

$$p(x,y) \Rightarrow P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$$

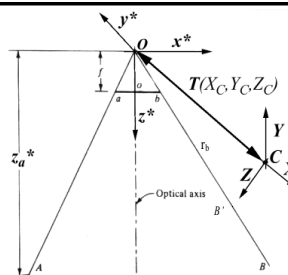
Sono 2 equazioni lineari in 3 incognite  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ :

- $[m_{31}(x-x_0) - fm_{11}] * \mathbf{X} + [m_{32}(x-x_0) - fm_{12}] * \mathbf{Y} + [m_{33}(x-x_0) - fm_{13}] * \mathbf{Z} = [m_{31}(x-x_0) - fm_{11}] * X_C + [m_{32}(x-x_0) - fm_{12}] * Y_C + [m_{33}(x-x_0) - fm_{13}] * Z_C$
- $[m_{31}(x-x_0) - fm_{21}] * \mathbf{X} + [m_{32}(x-x_0) - fm_{22}] * \mathbf{Y} + [m_{33}(x-x_0) - fm_{23}] * \mathbf{Z} = [m_{31}(x-x_0) - fm_{21}] * X_C + [m_{32}(x-x_0) - fm_{22}] * Y_C + [m_{33}(x-x_0) - fm_{23}] * Z_C$

Le equazioni di collinearità individuano perciò 2 piani:

- $a_1 \mathbf{X} + b_1 \mathbf{Y} + c_1 \mathbf{Z} = d_1$
- $a_2 \mathbf{X} + b_2 \mathbf{Y} + c_2 \mathbf{Z} = d_2$

L'intersezione dei 2 piani mi dà la retta di proiezione Op nello spazio 3D.



## Ricostruzione stereoscopica

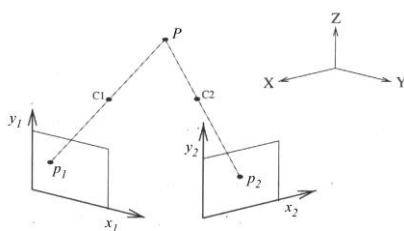


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

2 coppie di immagini  $\rightarrow$  2 coppie di equazioni di collinearità  
 $\{p_1(x,y) \Leftrightarrow p_2(x,y)\}$

4 equazioni in 3 incognite:  
 $[p_1(x,y) | p_2(x,y)] \Rightarrow P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ .

**Equazioni di collinearità per due video-camere:**

- $a_{1,TV1} \mathbf{X} + b_{1,TV1} \mathbf{Y} + c_{1,TV1} \mathbf{Z} = d_{1,TV1}$
- $a_{2,TV1} \mathbf{X} + b_{2,TV1} \mathbf{Y} + c_{2,TV1} \mathbf{Z} = d_{2,TV1}$

- $a_{1,TV2} \mathbf{X} + b_{1,TV2} \mathbf{Y} + c_{1,TV2} \mathbf{Z} = d_{1,TV2}$
- $a_{2,TV2} \mathbf{X} + b_{2,TV2} \mathbf{Y} + c_{2,TV2} \mathbf{Z} = d_{2,TV2}$



## Soluzione di un sistema lineare

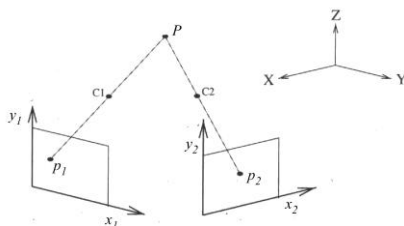


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

- $a_{1,TV1} X + b_{1,TV1} Y + c_{1,TV1} Z = d_{1,TV1}$
- $a_{2,TV1} X + b_{2,TV1} Y + c_{2,TV1} Z = d_{2,TV1}$
- $a_{1,TV2} X + b_{1,TV2} Y + c_{1,TV2} Z = d_{1,TV2}$
- $a_{2,TV2} X + b_{2,TV2} Y + c_{2,TV2} Z = d_{2,TV2}$

4 equazioni in 3 incognite:  
 $[p_1(x,y) | p_2(x,y)] \Rightarrow P(XYZ)$ .

1 equazione di troppo,

3 equazioni in 3 incognite per i matematici

$$A P = [d_{1,TV1} \ d_{2,TV1} \ d_{1,TV2}]^T$$

$$P = A^{-1} [d_{1,TV1} \ d_{2,TV1} \ d_{1,TV2}]^T$$

Ma il punto P non viene proiettato in  $p_1 \ p_2$



## Ricostruzione - matrici

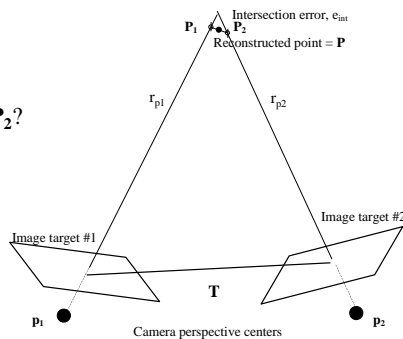


$$A = \begin{bmatrix} a_{1TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{2TV1} & b_{2TV1} & c_{2TV1} \\ a_{1TV2} & b_{1TV2} & c_{1TV2} \\ a_{2TV2} & b_{2TV2} & c_{2TV2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} d_{1TV1} \\ d_{2TV1} \\ d_{1TV2} \\ d_{2TV2} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

In forma matriciale:  $A P = B \Rightarrow A^T A P = A^T B \Rightarrow P = (A^T A)^{-1} A^T B$

Sono 4 equazioni in 3 incognite

- Effetto dell'errore di misura: quanto vale  $P_1 - P_2$ ?
- Quando non ammette soluzioni?



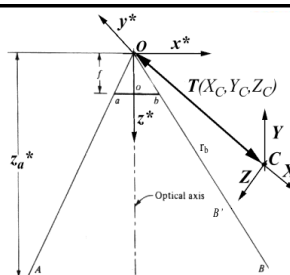


## Ricostruzione - Ray intersection

Le equazioni di collinearità individuano individuano perciò una retta come intersezione di 2 piani:

- $a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1$
- $a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2$

L'intersezione dei 2 piani mi dà la retta di proiezione  $Op$  nello spazio 3D.



Altra soluzione: equazioni in forma parametrica delle due rette:

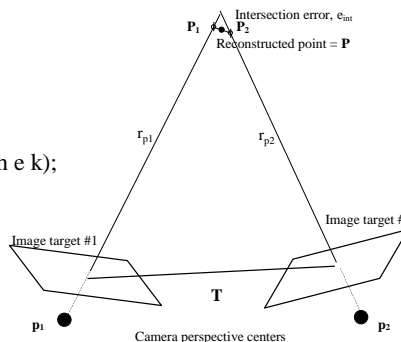
$$\begin{aligned} X_1 &= X_{c1} + a_1 k & X_2 &= X_{c2} + a_2 h \\ Y_1 &= Y_{c1} + b_1 k & Y_2 &= Y_{c2} + b_2 h \\ Z_1 &= Z_{c1} + c_1 k & Z_2 &= Z_{c2} + c_2 h \end{aligned}$$

$$\min_{h,k} [(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2]$$

- Calcolo della distanza (funzione dei due parametri, h e k);
- Minimizzazione (funzione dei due parametri).

Ritrovo la stessa soluzione.

$$P = (A^T A)^{-1} A^T B$$



## Riassunto



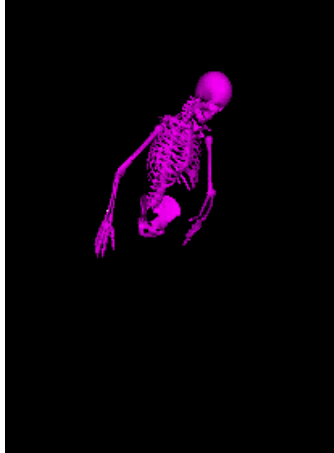
- Ricostruzione 3D
- **Catena cinematica**
- La cinematica diretta



## Cinematica di uno scheletro



Unregistered HyperCam



Cinematica: descrizione del movimento indipendentemente dalle cause che lo hanno generato.

Dobbiamo descrivere il movimento di **tutti** i punti dello scheletro



## Cinematica di uno scheletro



Unregistered HyperCam



Per descrivere il movimento dello scheletro, occorre definire l'andamento nel tempo dei suoi parametri liberi (e.g. rotazioni relative)

Curve di animazione: rappresentano l'andamento nel tempo dei parametri liberi di uno scheletro.



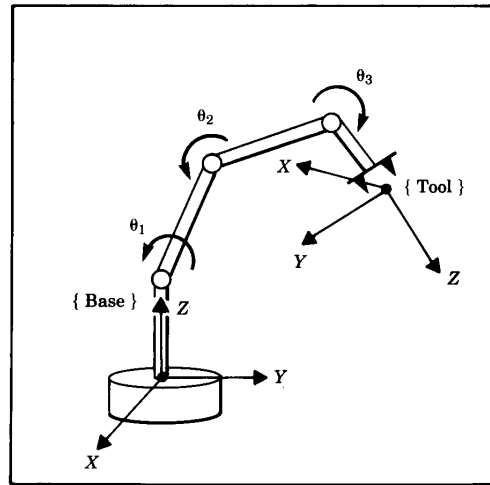
# Cinematica diretta



Conosco il valore dei joint (angolo o offset) → posizione ed orientamento dell'end-point.

End-point o end-effector è tipicamente il punto finale di una catena cinematica.

In VR e animazione, l'end-point è qualsiasi punto dello scheletro di interesse.



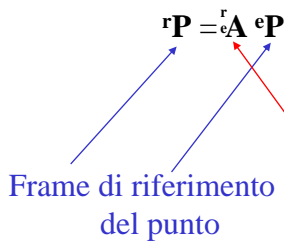
La cinematica viene descritta come sequenza di rotazioni / traslazioni / scala applicate ai singoli joint (relative) che hanno l'effetto di muovere l'end-effector solitamente nello spazio Cartesiano.



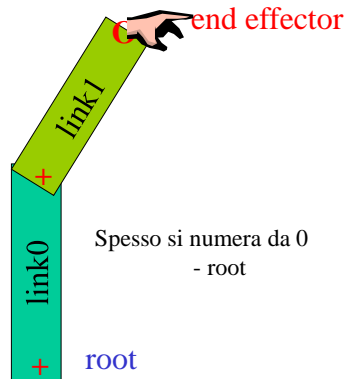
# Convenzioni




$$\begin{bmatrix} {}^r X_P \\ {}^r Y_P \\ {}^r Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^e X_P \\ {}^e Y_P \\ {}^e Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$




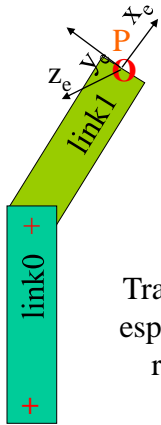
Trasformazione del frame e nel frame r





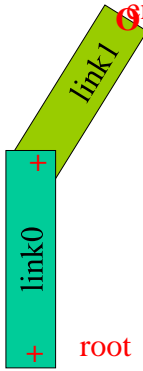
## Posizione dei segmenti (I)





${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$   
Punto P espresso nel frame dell'end-effector.

Trasformiamo  ${}^e\mathbf{P}$  fino ad esprimerlo nel sistema di riferimento assoluto  
 $S = \{XYZ\}$ :  ${}^{abs}\mathbf{P}$ .




end effector  
root


A.A. 2024-2025

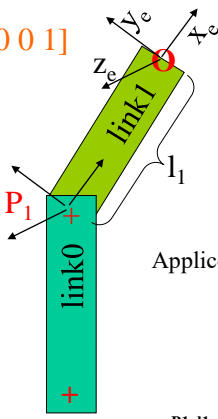
19/42

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Posizione dei segmenti (II)



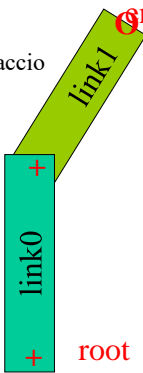


${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P1\_L1}\mathbf{P} = {}^{P1\_L1}_e\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]^T$

Applico una traslazione lungo l'avambraccio

$${}^{P1\_L1}_e\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



end effector  
root

A.A. 2024-2025

20/42

<http://borghese.di.unimi.it/>



### Posizione dei segmenti (III)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{P1\_L1}\mathbf{P} = [l_1, 0, 0, 1]$

$${}^{P1\_L0}\mathbf{P} = {}^{P1\_L0}_{P1\_L1}\mathbf{A} {}^{P1\_L1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applico una rotazione attorno al braccio (rotazione relativa)

$${}^{P1\_L0}_{P1\_L1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2024-2025 21/42 http://borghese.di.unimi.it/



### Posizione dei segmenti dall'end-point



$${}^{P1\_L0}_e\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{P1\_L0}_{P1\_L1}\mathbf{A} {}^{P1\_L1}_e\mathbf{A}$$

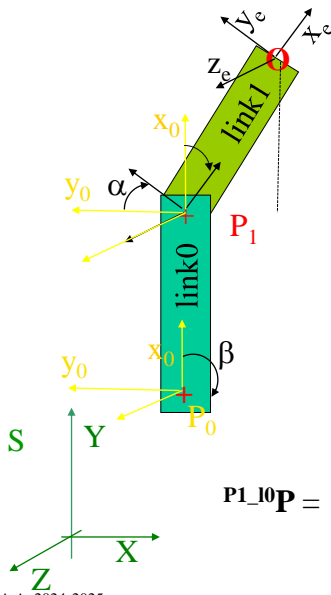
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{P1\_L0}\mathbf{P} = {}^{P1\_L0}_e\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [0, 0, 0, 1]^T$$

A.A. 2024-2025 22/42 http://borghese.di.unimi.it/



# Esempio



$${}^{P1}{}_{e}A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

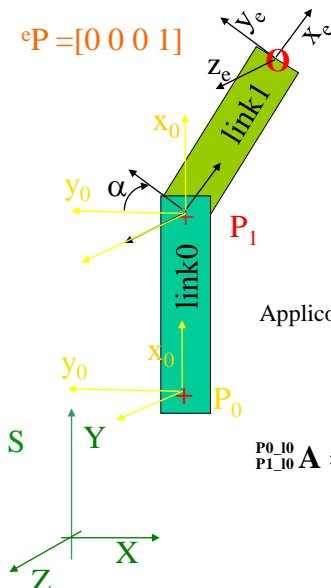
$\alpha = 45^\circ$

$${}^{P1}{}_{0}A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P1}{}_{0}P = {}^{P1}{}_{e}A {}^eP = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# Posizione dei segmenti (IV)



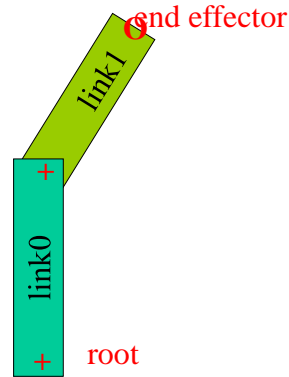
$${}^eP = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$${}^{P0}{}_{L0}P = {}^{P0}{}_{P1}A {}^{P1}{}_{L0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

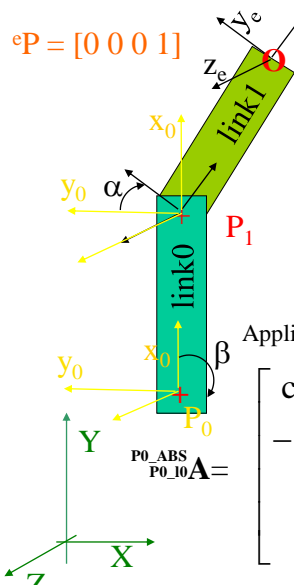
$${}^{P1}{}_{L0}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applico una traslazione lungo il braccio

$${}^{P0}{}_{P1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



### Posizione dei segmenti (V)



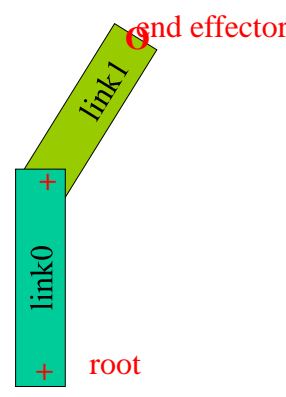
${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ 

$${}^{P_0\_ABS}\mathbf{P} = \begin{matrix} {}^{P_0\_ABS} \\ {}^{P_0\_10}\mathbf{A} \end{matrix} {}^{P_0\_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0\_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

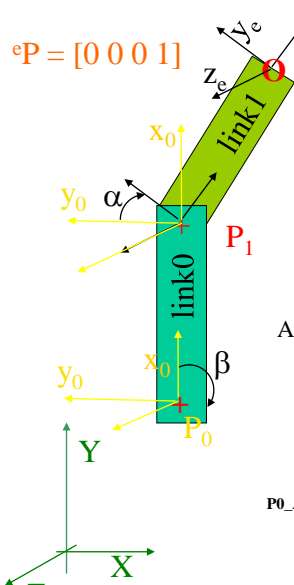
Applico una rotazione attorno alla spalla

$${}^{P_0\_ABS} \\ {}^{P_0\_10}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2024-2025 25/42 http://borghese.di.unimi.it/

### Posizione dei segmenti (VI)

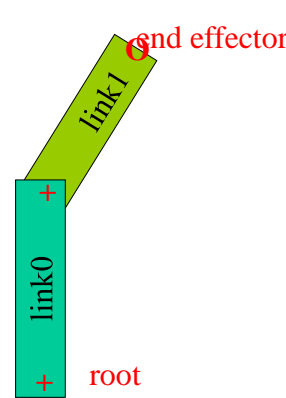


${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ 

$${}^{P_0\_ABS}\mathbf{P} = \begin{matrix} {}^{P_0\_ABS} \\ {}^{P_0\_10}\mathbf{A} \end{matrix} {}^{P_0\_L0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Applicando le formule di prostaferesi (non necessario)

$${}^{P_0\_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2024-2025 26/42 http://borghese.di.unimi.it/



## Posizione dei segmenti (VII)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}_{\text{P}_0\_ABS}\mathbf{P} = {}_{\text{P}_0\_ABS}{}^ABS\mathbf{A} \cdot {}^e\mathbf{P} =$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector

${}_{\text{P}_0\_ABS}{}^ABS\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

link0 + root

${}_{\text{P}_0\_ABS}\mathbf{P} =$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2024-2025 27/42 http://borghese.di.unimi.it/



## Concatenando le trasformazioni



${}_{\text{P}_0\_ABS}{}^ABS\mathbf{A} = {}_{\text{P}_0\_ABS}{}^ABS\mathbf{A} \cdot {}_{\text{P}_0\_10}{}^ABS\mathbf{A} \cdot {}_{\text{P}_1\_10}{}^ABS\mathbf{A} \cdot {}_{\text{P}_1\_11}{}^ABS\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}_{\text{P}_0\_ABS}{}^ABS\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}_{\text{P}_0\_ABS}\mathbf{P} = {}_{\text{P}_0\_ABS}{}^ABS\mathbf{A} \cdot {}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

A.A. 2024-2025 28/42 http://borghese.di.unimi.it/



## Posizione dei segmenti: fattorizzazione



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{ABS\_ABS}{}^e\mathbf{A} \mathbf{P} =$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^{ABS\_ABS}{}^e\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2024-2025 29/42 http://borghese.di.unimi.it/

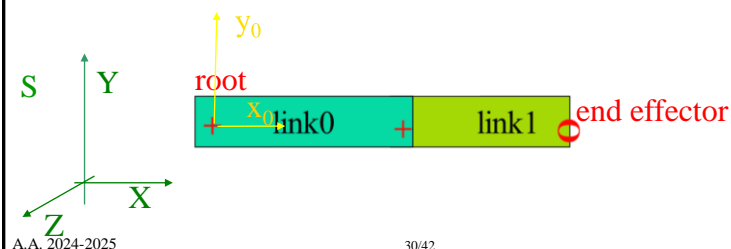


## Esempio di calcolo della posizione



$\alpha = 0; \beta = 0$  Braccio allineato come S

$${}^{ABS\_ABS}{}^e\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_0 + T_x \\ T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$





## Dall'end-effector alla base



- Il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della **geometria** (lunghezze dei segmenti) e dei **parametri liberi** (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).
- Le rotazioni vengono definite in un **sistema di riferimento locale**.
- Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre....

$${}^{\text{ABS\_ABS}}\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS\_ABS}}_{\text{P0\_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0\_ABS}}_{\text{P0\_10}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0\_10}}_{\text{P1\_10}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1\_10}}_{\text{P1\_11}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1\_11}}_{\text{e}}\mathbf{A}] \mathbf{eP}$$

fattorizzare le matrici di trasformazione.

$${}^{\text{ABS\_ABS}}_{\text{e}}\mathbf{A} = {}^{\text{ABS\_ABS}}_{\text{P0\_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0\_ABS}}_{\text{P0\_10}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0\_10}}_{\text{P1\_10}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1\_10}}_{\text{P1\_11}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1\_11}}_{\text{e}}\mathbf{A}$$



## Osservazioni sulle matrici di trasformazione, A



Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base.

**A è funzione di:**

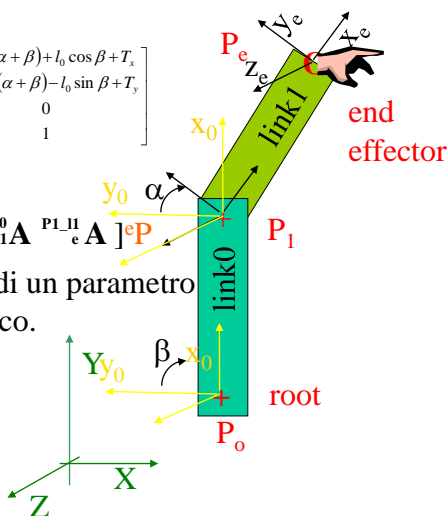
- Geometria
- Parametri liberi

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{\text{ABS\_ABS}}\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS\_ABS}}_{\text{P0\_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0\_ABS}}_{\text{P0\_10}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0\_10}}_{\text{P1\_10}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1\_10}}_{\text{P1\_11}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1\_11}}_{\text{e}}\mathbf{A}] \mathbf{eP}$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$${}^{\text{ABS\_ABS}}\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS\_ABS}}_{\text{P0\_ABS}}\mathbf{A}(T) \quad {}^{\text{P0\_ABS}}_{\text{P0\_10}}\mathbf{A}(\beta) \quad {}^{\text{P0\_10}}_{\text{P1\_10}}\mathbf{A}(l_0) \quad {}^{\text{P1\_10}}_{\text{P1\_11}}\mathbf{A}(\alpha) \quad {}^{\text{P1\_11}}_{\text{e}}\mathbf{A}(l_1)] \mathbf{eP}$$





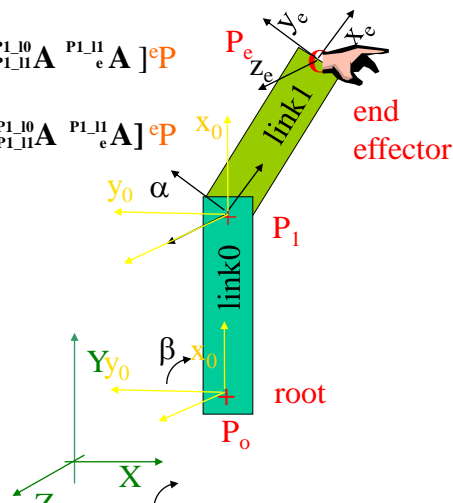
## Cosa rappresenta $A^{-1}$



Rappresenta la trasformazione inversa: dalla base all'end-point

$${}^{ABS\_ABS}P = [ {}^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}A \quad {}^{P0\_ABS}_{P0\_10}A \quad {}^{P0\_10}_{P1\_10}A \quad {}^{P1\_10}_{P1\_11}A \quad {}^{P1\_11}_eA ] {}^eP$$

$${}^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}A^{-1} {}^{ABS\_ABS}P = [ {}^{P0\_ABS}_{P0\_10}A \quad {}^{P0\_10}_{P1\_10}A \quad {}^{P1\_10}_{P1\_11}A \quad {}^{P1\_11}_eA ] {}^eP$$



$${}^eP = {}^{P1\_11}_eA^{-1} {}^{P1\_10}_{P1\_11}A^{-1} {}^{P0\_10}_{P1\_10}A^{-1} {}^{P0\_ABS}_{P0\_10}A^{-1} {}^{ABS\_ABS}_{P0\_ABS}A^{-1} {}^{ABS\_ABS}P$$

<http://borghese.di.unimi.it/>



## Quante matrici di trasformazione?



- Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
- Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
- Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.
- Notazione molto generale (approccio costruttivo).
- Notazione prolissa.
- Si arriva a 1 matrice di trasformazione, qualsiasi il numero di trasformazioni elementari.
- La matrice di trasformazione complessiva viene costruita in modo incrementale, rispettando la gerarchia.



## Riassunto



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- **La cinematica diretta**

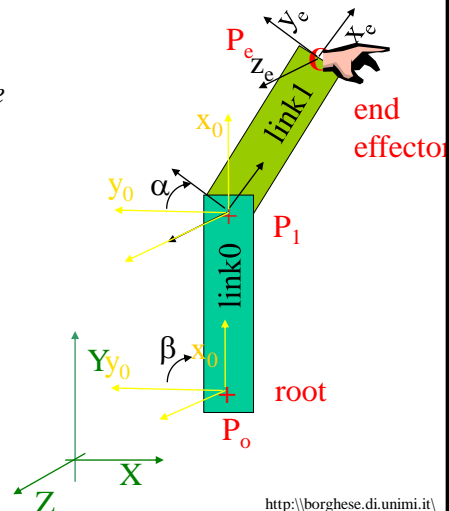


## La cinematica diretta



Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento di ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint, dalla base all'end-effector.





## Come animare uno scheletro

Data la sequenza di angoli (**relativi**) è possibile determinare istante per istante la posizione del braccio e dell'end-effector.

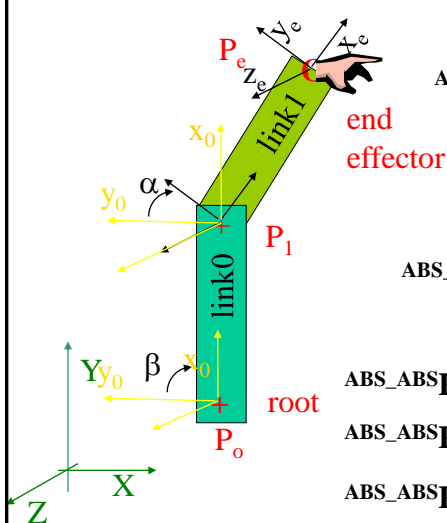
Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?



## Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$${}_{ABS\_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS\_ABS}P(t) = {}_{ABS\_ABS}A(t) \ eP$$

$\Rightarrow$

$${}_{ABS\_ABS}P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS\_ABS}P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS\_ABS}P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

### Joint space (peso dei joint)

Rotazione attorno a  $P_0$  (angolo  $\beta$ )

Rotazione attorno a  $P_1$  (angolo  $\alpha$ )

La posizione dell'end effector è diversa a parità di rotazione.

A.A. 2024-2025 39/42 http://borghese.di.unimi.it/

### Descrizione cinematica diretta

$${}_{ABS\_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS\_ABS}P(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS\_ABS}P(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Sequenza temporale di  $[\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)] \rightarrow$  sequenza temporale di  ${}_{ABS\_ABS}P(t)$ .

imi.it



## Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$${}^{ABS\_ABS}\mathbf{P}(\mathbf{t}) = {}^{ABS\_ABS}_c\mathbf{A}(\mathbf{t}) \mathbf{e}\mathbf{P}$$

$${}^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_x(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_x(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$$

$${}^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_y(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_y(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$$

$${}^{ABS\_ABS}\mathbf{P}_z(\mathbf{t}) = \mathbf{f}_z(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{t}), \mathbf{T}_x(\mathbf{t}), \mathbf{T}_y(\mathbf{t}) \mid \mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1)$$

Ciascuna di queste funzioni è rappresentata come prodotto di una riga della matrice  $\mathbf{A}$  per  $\mathbf{P}$ .



## Riassunto



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- La cinematica diretta